

EL DETERMINISMO MECANICISTA Y EL AZAR

Miguel Ángel García Álvarez

El resultado del lanzamiento de un dado ilustra lo que comúnmente se entiende por un resultado azaroso; se puede obtener uno de 6 posibles resultados. Los juegos donde se utilizan dados o algo similar se inventaron hace miles de años; no se trataba de juegos únicamente con dados, sino que éstos eran utilizados para determinar los movimientos que debían hacerse sobre algún tablero, avanzando cierto número de casillas. El dado más antiguo que se conoce fue encontrado en Irak y tiene una antigüedad de alrededor de 5 mil años.

El astragalo, también conocido como tali o taba, es un precursor del dado. Se trata de un hueso del pie el cual presenta cuatro caras, cada una con un nombre que más tarde se convirtió en un número. Las más utilizadas son las del carnero. Los juegos con tabas son tan antiguos como los juegos con dados; se han encontrado tabas en las tumbas de los faraones egipcios.

En la antigua Grecia y en Roma se volvió muy popular un juego que consistía en lanzar 4 tabas; en las caras de cada una de ellas estaban marcados los números 1, 3, 4 y 6, respectivamente. Las diferentes combinaciones tenían diferentes valores, siendo considerada la más alta la que consiste en 4 números distintos, la cual era llamada Venus.

.^{El} juego alcanzó tal popularidad entre los romanos que fue necesario promulgar leyes prohibiéndolo excepto en ciertas estaciones. Qué juego era jugado por la gente común, no lo sabemos, pero hay muchas referencias a los que eran jugados por los emperadores. En la Vida de Augusto de Suetonius (traducción de Loeb) encontramos: ... en una carta escrita con su propia mano [se refiere a Augusto] dice: ‘cené, querido Tiberius, con la misma compañía, ... Jugamos como hombres viejos durante la comida tanto ayer como hoy; cuando los dados eran lanzados y se obtenía el "perro.^o el 6, se ponía un denarius en la mesa por cada punto del dado, y el total era tomado por quien obtuviera Venus’ "([6]).

"Hay otras referencias al juego en su Vida. Si la palabra talis debería traducirse como dados o astragali (knucklebones) es un punto irrelevante. El dado como lo conocemos era usualmente referido como ‘tessera’. El astragalus es a menudo llamado el talus, y ésta es la palabra que utilizaba Suetonius"([6]).

Durante la Edad media los juegos con dados se extendieron por toda Europa y se fue adquiriendo un conocimiento empírico acerca de ellos. Es en esa época cuando surge el término azar, el cual es de origen árabe y surgió a fines del siglo XI. En una de las caras de los dados que se utilizaban para jugar estaba dibujada una flor, representando un resultado desfavorable para quien lo obtenía. La expresión árabe es az-zahr, la cual significa la flor. Por extensión se llamaba también az-zahr al dado y también se entendía por az-zahr el lanzar los dados.

Se volvió tan popular el juego con dados que en el Libro de los Juegos, escrito en la segunda mitad del siglo XIII por Alfonso X, se encuentra una sección dedicada a los dados. Se dice ahí: “Los dados deben tener seis lados iguales, todos iguales en tamaño y forma porque de otra manera no se obtendría con la misma frecuencia un lado que otro y habría entonces trampa más que suerte” ([1]).

Además de los juegos con dados no hay muchas referencias acerca del azar que provengan de la Edad Media. De lo poco que se conoce puede deducirse que el azar se equiparaba con la suerte

y parecen haberse olvidado las ideas de los filósofos griegos acerca del tema. Durante ese periodo continuaron utilizándose sucesos que pueden ocurrir de diferentes maneras para fines adivinatorios. Por ejemplo, los hunos tenían algo parecido a chamanes o brujos especializados en la adivinación a partir del examen de restos y huesos de animales.

Entre los versos de Carmina Burana, colección de cantos de los siglos XII y XIII, se encuentra uno dedicado a la Fortuna, siempre incierta, siempre cambiante:

O Fortuna ([9])

¡Oh fortuna!
 Como la luna
 de estado cambiante,
 siempre creciente
 o menguante.
 Vida detestable,
 la que ahora endurece
 y luego restablece
 en su juego la agudeza de la mente;
 la pobreza,
 el poder
 como la nieve los disuelve.

Destino cruel
 y vano,
 rueda tú que giras,
 situación mala,
 salud mala,
 siempre inestable,
 ensombrecida
 y velada,
 contra mi también te encaminas;
 ahora la espalda desnuda
 llevo por burla
 de tu inquina.

De mi salud
 y mi virtud
 el destino ahora me es adverso;
 mis deseos y mis carencias
 siempre están en su dependencia.
 Ahora y
 sin demora
 las cuerdas ya afinad,
 pues el azar abate
 al fuerte,
 ¡todos conmigo llorad!

Si bien durante la Edad Media el pensamiento pareció detenerse bajo el imperio de la religión, el trabajo práctico de artesanos, médicos e ingenieros, principalmente, así como el conocimiento humanista, se fueron desarrollando. En el siglo XVI vino el renacimiento de las ideas buscando nuevamente una comprensión racional del mundo; es en ese siglo cuando Copérnico inició la revolución científica al plantear que la Tierra no es el centro del universo. La ciencia floreció nuevamente y en el siglo XVII se llevó a cabo una síntesis, especialmente con los trabajos de Galileo, Descartes y Newton. De esa síntesis surgió el patrón de explicaciones por leyes de aplicación universal y la idea de explicar los fenómenos naturales mediante la construcción de modelos matemáticos ([20]). Esa revolución durante el Renacimiento tuvo en sus bases el desarrollo de máquinas, cada vez más complejas, que demandaba el capitalismo naciente, y también el empleo del razonamiento científico y la vinculación entre teoría y experimento, impulsadas por Galileo y la idea, desarrollada por Descartes y Newton, de que el conocimiento científico se puede matematizar.

A René Descartes se le considera el fundador de la filosofía moderna y también quien inicia el método racionalista y el uso de la duda metódica como base de la investigación. Es con esta idea que Descartes dio nuevos pasos para la construcción de la ciencia moderna. En el terreno de las matemáticas, sentó las bases para la invención de la representación de puntos en el plano y logró fusionar el álgebra y la geometría, creando así la rama conocida como "geometría analítica". La vida y el pensamiento de Descartes van unidos a la revolución científica que se inició a finales del siglo XV con Nicolás Copérnico (1473-1543) quien había dado a conocer su teoría según la cual la Tierra gira alrededor del Sol. Fue ésa una época revolucionaria en la cual mucha gente decía "no.^a lo que se presentaba como la única realidad posible, tanto en el mundo de las ideas como en el sistema social imperante.

El tema central de la revolución científica fue el del movimiento y es sorprendente la simplicidad de las leyes que se lograron formular para modelar todo tipo de movimiento mecánico: el de un cuerpo que se mueve libremente sobre una superficie sin fricción, el de la caída de un objeto, el de una bala lanzada por un cañón, entre otros, y especialmente el de los cuerpos celestes, sean planetas, estrellas, meteoritos, cometas, etcétera. Todos ellos son bien modelados por las leyes de Newton.

La revolución científica fue más lejos y surgieron las leyes de conservación de la masa y de la energía (que más adelante, con la teoría de la relatividad, se convertirían en una sola ley de conservación). También se fueron entendiendo las transformaciones de una forma de energía en otra, lo cual llevó a una revolución tecnológica.

Poco a poco se fue generando la idea de que se habían encontrado las herramientas que darían una explicación completa del mundo. "Las grandes conquistas de la mecánica en todas sus ramas, su brillante triunfo en el desarrollo de la astronomía, la aplicación de esas ideas a problemas manifiestamente diferentes y no teniendo un carácter mecánico, todas esas cosas contribuyeron al nacimiento de la creencia de que es posible describir todos los fenómenos de la naturaleza en términos de fuerzas simples ejerciéndose entre objetos invariables"([8]).

Surgió entonces la idea de un mundo que funciona como una gran máquina cuyo movimiento está totalmente determinado hasta sus más pequeños detalles. De acuerdo con esta idea, el universo completo está regido por leyes deterministas, de carácter universal, de tal forma que la evolución del universo queda determinada por esas leyes y su estado en un momento

dado. La ciencia en el siglo XVIII se desarrolló bajo esta idea con resultados sorprendentes en diferentes áreas; todo parecía encajar en ese modelo determinista mecanicista.

1. SURGIMIENTO DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

Durante el Renacimiento se dió importancia al tema del azar, en gran parte por su papel en diferentes áreas de interés en la economía, como los riesgos en la navegación por ejemplo, pero también, como ya lo mencionamos, en algo que se había convertido en uno de los pasatiempos favoritos de la época, el juego con dados.

Uno de los primeros problemas matemáticos que se planteó al considerar los juegos con dados fue el de determinar cuántos resultados distintos pueden obtenerse al lanzar n dados. La primera solución correcta conocida de este problema se encuentra en un poema titulado “De Vetula” y escrito por Richard de Fournival (1200-1250). Ahí se afirma que 3 dados pueden caer en un total de 216 caminos ([17]).

En 1564, Gerolamo Cardano, en su libro *Liber de ludo aleae* ([3]), realizó el primer estudio sistemático de problemas relacionados con el lanzamiento de varios dados y los diferentes resultados que podían obtenerse

En su libro, estableció Cardano el número de posibilidades en el lanzamiento de 2 y 3 dados, obteniendo 36 y 216, respectivamente. Aunque en un lenguaje distinto al que se usó más tarde en el Cálculo de Probabilidades, Cardano planteó y resolvió, a la manera clásica, problemas de probabilidad. Un ejemplo es el siguiente:

Considerando el lanzamiento de 2 dados, estableció que por lo menos un as se obtiene de 11 maneras; lo mismo puede decirse de por lo menos un dos, y así sucesivamente. Agregaba que, sin embargo, un as o un dos no se obtiene de 22 maneras, pues hay 11 maneras en que se obtiene por lo menos un as y 9 más en que se obtiene por lo menos un dos, así que en total son 20 maneras de obtener por lo menos un as o por lo menos un dos. Continuaba diciendo que si se agrega ahora el 3, habrá 7 maneras más y así sucesivamente; en el siguiente paso habrá que sumar 5 maneras más, luego 3 y por último 1.

Decía entonces que si alguien dijera, quiero un as un dos o un tres, se sabe que hay 27 caminos favorables y como el circuito es de 36, los caminos en que no se obtiene ninguno de estos números son 9; las posibilidades son entonces de 3 a 1.

Con este razonamiento Cardano llegó de hecho a la llamada definición clásica de probabilidad estableciendo las posibilidades de obtener un determinado resultado en función del número de posibles maneras en que ese resultado puede obtenerse.

El libro de Cardano no tuvo influencia ya que no fue publicado hasta 1663, cuando ya se había iniciado el desarrollo de la teoría de la probabilidad con los trabajos de Fermat, Pascal y Huygens entre 1654 y 1657. Ésta se desarrolló a partir del análisis de algunos juegos con dados y monedas, al observar que existía una relación entre la frecuencia con que ocurrían los diferentes resultados y las distintas maneras teóricas en que pueden obtenerse los mismos.

La primera referencia conocida a una relación entre las diferentes posibilidades de ocurrencia de un evento y la frecuencia con que éste se observa, se encuentra en los comentarios a una publicación de “La Divina Comedia” que en el año 1477 hizo Benvenuto d’Imola. Dice ahí: “Concerniente a estos lanzamientos (de dados) debe observarse que los dados son cuadrados

y cualquier cara puede caer, así que un número que pueda aparecer en más caminos debe ocurrir más frecuentemente, como en el siguiente ejemplo: con tres dados, tres es el más pequeño número que puede obtenerse y sólo se obtiene con tres ases; cuatro puede obtenerse sólo en un camino, con un dos y dos ases” ([17]).

Entre los problemas que resolvieron Fermat, Pascal y Huygens, destacan los siguientes:

Problema 1. *¿Cómo deben repartirse las apuestas en un juego que se interrumpe? Por ejemplo, suponiendo que dos jugadores, A y B, apuestan 32 pesos cada uno en un juego que consiste de partidas consecutivas, en cada una de las cuales cada jugador tiene la misma posibilidad de ganarla, de tal manera que quien gane una partida acumula un punto y el juego es ganado por quien obtenga primero cuatro puntos, ¿cómo deben de repartirse las apuestas en caso de que el juego se interrumpa cuando el jugador A ha ganado dos puntos y B un punto?*

Problema 2. *¿Cuántas veces se necesita lanzar un par de dados para que sea más favorable obtener por lo menos un par de seises que no obtenerlo?*

Problema 3. *Dos jugadores, P y Q, juegan a lanzar alternadamente un par de dados. El juego comienza lanzando P el par de dados, con la condición de que si obtiene una suma igual a 6 gana el juego; en caso contrario el juego continúa lanzando Q el par de dados, con la condición de que si obtiene una suma igual a 7 gana el juego; en caso contrario el juego continúa lanzando P el par de dados bajo las condiciones iniciales. ¿Cuáles son las respectivas probabilidades que cada jugador tiene de ganar el juego?*

Problema 4. *Dos jugadores, A y B, los cuales poseen 12 fichas cada uno, juegan a lanzar sucesivamente tres dados, estableciéndose que A dará una ficha a B cada vez que se obtenga una suma igual a 11, mientras que B dará una ficha a A cada vez que se obtenga una suma igual a 14. Si el ganador del juego es el primero que llegue a poseer las 24 fichas, ¿cuáles son las respectivas probabilidades que cada jugador tiene de ganar el juego?*

Los problemas 1 y 2 fueron planteados a Pascal en el año 1654 por Antoine Gombaud de Méré, conocido como el chevalier de Méré, quien era aficionado a los juegos de azar y había logrado resolver el problema 2 pero no el 1. Pascal y Fermat encontraron las soluciones correctas a los dos problemas, mismas que se dieron a conocer entre ellos en una serie de cartas las cuales constituyen los únicos documentos en los cuales quedaron plasmados los métodos que utilizaron. Más tarde, Huygens, sin conocer los métodos utilizados por Pascal y Fermat, encontró también las soluciones correctas a ambos problemas y en el año 1657 publicó sus soluciones en su libro “De ratiociniis in Ludo Aleae” ([15]), siendo ésta la publicación que se convirtió en la base para el desarrollo posterior del Cálculo de Probabilidades.

El problema 1 fue el problema que más interés provocó debido a que pocos lograron encontrar la solución correcta. La solución que dió Fermat a este problema es la siguiente:

Al jugador A le faltan 2 partidas para ganar y al jugador B 3 partidas, entonces, a lo más en 4 partidas adicionales se acaba el juego. Denotando por la letra a el que A gane una partida y por la letra b el que gane B, los posibles resultados de 4 partidas son los siguientes:

$(a, a, a, a), (a, a, a, b), (a, a, b, a), (a, a, b, b), (a, b, a, a), (a, b, a, b), (a, b, b, a), (b, a, a, a),$
 $(b, a, a, b), (b, a, b, a), (b, b, a, a), (b, b, b, b), (b, b, b, a), (b, b, a, b), (a, b, b, b), (b, a, b, b)$

donde, por ejemplo, (b, b, a, b) significa que A gana sólo la tercera partida y B las otras 3.

De estos 16 posibles resultados, hay 11 que hacen ganar al jugador A, a saber, (a, a, a, a) , (a, a, a, b) , (a, a, b, a) , (a, a, b, b) , (a, b, a, a) , (a, b, a, b) , (a, b, b, a) , (b, a, a, a) , (b, a, a, b) , (b, a, b, a) y (b, b, a, a) . Los 5 restantes, (b, b, b, b) , (b, b, b, a) , (b, b, a, b) , (a, b, b, b) y (b, a, b, b) , hacen ganar al jugador B. Por lo tanto, las apuestas se deben repartir en la proporción 11 : 5.

Podemos observar en la solución de Fermat que parece haber un problema, pues para contar los casos en que gana cada jugador considera que se juegan las 4 partidas y en algunos de esos casos el juego se termina antes de llegar a la cuarta. En realidad eso no representa problema ya que, por ejemplo, si A gana las dos primeras partidas (de las 4), en cuyo caso se acabaría ahí el juego, lo que hace Fermat es descomponer ese caso, es decir (a, a) en 4 casos, a saber, (a, a, a, a) , (a, a, a, b) , (a, a, b, a) y (a, a, b, b) ; el caso (a, a) tiene 1 posibilidad de 4; los cuatro casos juntos (a, a, a, a) , (a, a, a, b) , (a, a, b, a) y (a, b, a, a) tienen 4 posibilidades de 16; así que las proporciones son ambas iguales a $\frac{1}{4}$. Algo similar puede argumentarse en las otras situaciones. El caso (a, b, a) se descompone en (a, b, a, a) y (a, b, a, b) ; el caso (b, a, a) se descompone en (b, a, a, a) y (b, a, a, b) ; el caso (b, b, b) se descompone en (b, b, b, b) y (b, b, b, a) . El objetivo de esas descomposiciones es, como lo decía Fermat, "hacer todos los azares iguales", es decir, en lenguaje moderno, todos los casos igualmente probables.

Los métodos seguidos por Pascal y Huygens para resolver este problema son distintos al de Fermat pero similares entre ellos. Su solución es como sigue:

Supongamos que al jugador A le falta una partida para ganar y a B dos, entonces, al jugar la siguiente partida hay dos posibilidades, la primera es que A la gane, en cuyo caso gana el juego y por lo tanto toda la apuesta, la segunda es que B la gane, en cuyo caso A y B quedan en igualdad de condiciones y debe entonces tocar a cada uno la mitad de las apuestas, es decir 32. Entonces en un caso a A le tocan 64 y en otro 32, así que, cualquiera que sea el caso, A tiene asegurado 32 y los otros 32 de las apuestas pueden corresponder a A o a B con un azar igual; por lo tanto, de esos 32, la mitad debe ser para A y la otra para B. Es decir, cuando a A le falta un punto y a B dos, a A le corresponde $32 + 16 = 48$ y a B 16.

Supongamos ahora que a A le falta un punto y a B tres. En esta situación, si se juega la siguiente partida, A puede ganar toda apuesta o bien 48 por el primer caso. Por lo tanto a A le corresponde $48 + \frac{1}{2}(16) = 56$ y a B 8.

Finalmente, supongamos que a A le faltan dos puntos y a B tres. En esa situación, si se juega la siguiente partida, A puede quedar faltándole un punto y tres a B, en cuyo caso le corresponde 56 por el segundo caso; o bien, si B gana esa partida, quedan en igualdad de circunstancias y toca a cada uno 32. Entonces A tiene asegurados 32 y puede ganar $56 - 32 = 24$ con un azar igual que B; así que entonces a A le corresponde $32 + \frac{1}{2}(24) = 44$ y a B $8 + \frac{1}{2}(24) = 20$, es decir, la repartición de las apuestas debe ser de 11 : 5.

Aunque los resultados de Pascal, Fermat y Huygens permitieron el establecimiento de reglas generales para resolver problemas de probabilidad y en ese sentido pueden considerarse como el origen del Cálculo de Probabilidades, la Teoría de la Probabilidad comenzó a ganarse un lugar importante dentro de la Matemática a partir del libro de Jacques Bernoulli, "Ars Conjectandi", publicado en el año 1713, ocho años después de su muerte ([2]).

Jacques Bernoulli. Hemos llegado ahora al punto ([18], págs. 138-141)

Además de resolver con sus propios métodos los problemas ya resueltos por Pascal, Fermat y Huygens, Bernoulli se planteó un problema de singular importancia, el cual sería la base para

todo el desarrollo posterior de la teoría. Escribió Bernoulli en su libro: “parece que, para hacer una hipótesis correcta sobre un hecho cualquiera, sólo es necesario calcular exactamente el número de casos posibles y, entonces, determinar las veces que puede posiblemente ocurrir un caso más que otro. Pero aquí, inmediatamente, surge nuestra mayor dificultad, porque este procedimiento se puede aplicar únicamente a muy pocos fenómenos; de hecho, casi exclusivamente a los relacionados con los juegos de azar ... pero hay otro camino que nos conduce a lo que buscamos, y nos permite, por lo menos, hallar a posteriori lo que no podemos determinar a priori, o sea, averiguando a partir de los resultados observados en numerosos casos similares. Ha de suponerse, a este respecto, que, bajo condiciones similares, la ocurrencia (o no ocurrencia) de un suceso en el futuro seguirá la misma pauta que se ha observado para sucesos iguales en el pasado ... Lo que aún tiene que ser averiguado es si, cuando se aumenta el número de observaciones, también se sigue aumentando la probabilidad de que la proporción registrada de casos favorables y desfavorables se aproxime a la verdadera relación ... Este es el problema que he decidido publicar aquí, después de haber trabajado sobre él durante veinte años”. El resultado al que hace referencia Bernoulli en su libro es el ahora llamado teorema de Bernoulli.

El resultado de Bernoulli hizo patente que en el modelo teórico que se estaba desarrollando se da efectivamente una correspondencia entre las probabilidades y las frecuencias con que se observan los posibles resultados de un suceso azaroso. Este resultado y otros del mismo tipo que le siguieron sentaron las bases teóricas para aplicar el cálculo de probabilidades al estudio de datos estadísticos.

Muy pronto esta teoría comenzó a aplicarse al tratamiento de datos como los acumulados en tablas de mortalidad y natalidad.

2. EL AZAR COMO PRODUCTO DE NUESTRA IGNORANCIA

A pesar del surgimiento y desarrollo de una teoría de la probabilidad, por lo menos hasta mediados del siglo XIX el azar parecía un concepto que en algún momento perdería importancia pues, para los pensadores de la época, sólo era producto de nuestra ignorancia. Laplace, científico francés, formuló esta idea de manera muy clara, en un artículo publicado en el año 1814, al afirmar que “todos los acontecimientos, aun aquellos que por su insignificancia parecen no depender de las grandes leyes de la naturaleza, constituyen una sucesión tan necesaria como las revoluciones del Sol. Ignorando los vínculos que los ligan al sistema entero del universo, se los ha hecho depender de causas finales o del azar, según que ocurrieran y se sucedieran con regularidad o sin orden aparente; pero esas causas imaginarias han retrocedido gradualmente con los límites de nuestros conocimientos y desaparecen por completo frente a la sana filosofía que no ve en ellas más que la expresión de nuestra ignorancia respecto de las verdaderas causas ... una inteligencia que en un determinado instante pudiera conocer todas las fuerzas que impulsan la naturaleza y la respectiva posición de los seres que la componen y que, además tuviera la suficiente amplitud para someter esos datos al análisis, incluiría en una sola fórmula los movimientos de los mayores cuerpos del universo y del más ligero átomo; nada le sería incierto y tanto el pasado como el futuro estarían en su presencia.” ([16], p. 2-3)

Leibniz ([19]): .^{En} la más mínima substancia, ojos tan penetrantes como los de Dios podrían leer la serie completa de cosas del universo, que son, que fueron, que se producirán en el

porvenir (Prigogine, el fin de las certidumbres, págs. 20-21)... todo cuerpo es sensible a cuanto sucede en el universo, de tal manera, que aquel que todo lo ve podría leer en cada uno lo que acontece en todas partes y aún lo que ha sucedido y sucederá, advirtiéndolo en el presente lo que se encuentra alejado tanto en el tiempo como en el espacio..."(Tesis de filosofía, p. 79-80, Losada, Biblioteca de obras maestras del pensamiento, 1714).

"Todo el mundo está de acuerdo en que los hechos futuros contingentes son seguros, puesto que Dios los prevé; pero no por eso se admite que sean necesarios... Mas (se dirá) si una conclusión puede deducirse infaliblemente de una definición o noción, aquélla será necesaria... la conexión o consecuencia es de dos clases; la una es absolutamente necesaria y su contrario implica contradicción, y esta deducción tiene lugar en las verdades eternas, como son las de la geometría; la otra es sólo necesaria ex hypothesi y, por así decirlo, por accidente, pero es contingente en sí misma, siempre que la contraria no implique contradicción... p. 121-122 no es necesario aquello cuyo opuesto sea posible p.124. si yo fuese capaz de considerar distintamente todo lo que me sucede o acaece en este momento, podría ver todo lo que me sucederá o acaecerá siempre"(Discurso de Metafísica, p. 127, 1686 [19])

3. EL FATALISMO ESTADÍSTICO

A medida que la teoría de la probabilidad se aplicaba al tratamiento de datos estadísticos, la idea que había formulado Bernoulli se hacía más palpable. Los datos mostraban que la frecuencia relativa con la que ocurre un evento efectivamente se mantiene aproximadamente constante. Del azar surgía la regularidad.

La constatación de este hecho llevó a lo que se llamó el "fatalismo estadístico". Las leyes de Newton se consideraban inviolables y regían todo tipo de movimiento, nada escapaba a esas leyes. Al constatarse la regularidad de las frecuencias en un fenómeno aleatorio, se llegó a pensar que las leyes estadísticas son tan inviolables como las leyes de la física. El surgimiento de esta idea y su afianzamiento durante la primera mitad del siglo XIX, lo analiza muy bien Ian Hacking en su libro *La domesticación del azar*. Menciona ahí como Adolphe Quetelet, después de estudiar, alrededor de 1830, las estadísticas judiciales de París, constató "la terrible exactitud con que se producen los crímenes". "Sabemos de antemano cuántos individuos se mancharán las manos con la sangre de otras personas, cuántos serán falsificadores, cuántos serán envenenadores, aproximadamente tan bien como podemos enumerar de antemano los nacimientos y muertes que deben verificarse". "La sociedad genera los crímenes, y la persona culpable es sólo el instrumento". Así decía la excitada carta de Quetelet a Villermé publicada en 1832 (p. 172).

En la década de 1830, la conducta humana estaba regida por leyes probabilísticas, constantemente comparadas con la ley de la gravedad. La física era todavía inexorable. Las leyes de la sociedad eran como las leyes de la física y en consecuencia no podían violarse.

Después de la publicación de su *Historia de la civilización en Inglaterra* (1857), T. H. Buckle se convirtió en la mayor celebridad londinense. ¿Podía basarse en el fatalismo estadístico una historia de la civilización compuesta en el siglo XIX? Sí, y se trataba de una historia cuyo fatalismo estaba confirmado por nuestros viejos amigos, los estadígrafos del suicidio. En un determinado estado de la sociedad, cierto número de personas debe poner fin a su propia vida.

Esta es la ley general; y en cuanto a la pregunta especial de quién cometerá el crimen, ella depende, por supuesto, de leyes especiales, las cuales sin embargo, en su acción total deben obedecer a la gran ley social a que todas aquéllas están subordinadas. Y el poder de la ley más general es tan irresistible que ni el amor a la vida ni el temor al otro mundo pueden hacer nada para contener las operaciones de dicha ley" (T. H. Buckle, 1857. p. 183).

El fatalismo estadístico fue producto de la observación del mantenimiento de determinadas proporciones, por ejemplo de suicidios en una determinada ciudad. Se pensaba que las leyes estadísticas explicaban los fenómenos. Ahora puede verse que esas leyes no explican, únicamente modelan. Se pensaba también que las leyes estadísticas se imponían sobre los individuos. Esto tampoco es así; esas leyes únicamente modelan fenómenos bajo determinadas circunstancias; si éstas cambian, cambia el modelo (no necesariamente el tipo, puede seguir siendo probabilístico, pero con otras proporciones). Un ejemplo típico podría ser la proporción de accidentes de carretera; al mejorar las condiciones de esas carreteras, disminuye la proporción. Otro ejemplo podría ser la proporción de niños que mueren por desnutrición en un determinado país; tal porcentaje es producto de las condiciones sociales de esa región; si cambian esas condiciones, cambia también la proporción.

La regularidad de la frecuencias relativa con que ocurre un evento fortuito está expresada en la ley de los grandes números de Bernoulli, la cual fue generalizada en 1800 por Poisson. Aunque es necesario aclarar que el resultado de Bernoulli y sus generalizaciones, incluyendo las que se dieron a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, son teoremas matemáticos, válidos dentro del marco conceptual en que están demostrados. No son resultados que demuestren la regularidad de las frecuencias relativas que se presenta en los fenómenos aleatorios. La ley débil de los grandes números es un resultado puramente teórico, el cual se obtiene a partir de las propiedades del modelo matemático que se utiliza para estudiar los fenómenos aleatorios. Su interpretación práctica requiere de consideraciones adicionales que no están contenidas dentro del modelo teórico. Sin embargo, hay algo, en conexión con esta discusión, que sí se deriva de la ley débil y es el hecho de que, si bien el resultado no demuestra la validez de la interpretación frecuencial de la probabilidad, sí muestra que el modelo probabilístico que hemos desarrollado es perfectamente compatible con tal interpretación.

El teorema de Bernoulli es un resultado de Cálculo Combinatorio, específicamente es un resultado acerca del desarrollo de un binomio $(r + s)^n$, donde r , s y n son números reales positivos.

Se tiene:

$$(r + s)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k s^{n-k}$$

Para $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, definamos $t_k = \binom{n}{k} r^k s^{n-k}$.

Para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, se tiene

$$\frac{t_{k-1}}{t_k} = \frac{\binom{n}{k-1} r^{k-1} s^{n-k+1}}{\binom{n}{k} r^k s^{n-k}} = \frac{ks}{(n-k+1)r}$$

De manera que $t_{k-1} \leq t_k$ si y sólo si $ks \leq nr - kr + r$, es decir, $k \leq (n+1) \frac{r}{r+s}$.

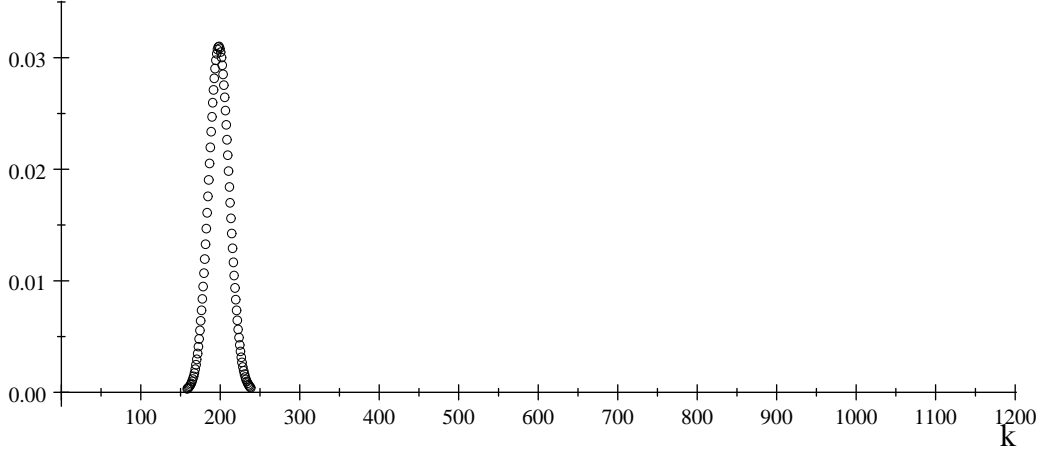
Para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, se tiene

$$\frac{t_k}{t_{k+1}} = \frac{\binom{n}{k} r^k s^{n-k}}{\binom{n}{k+1} r^{k+1} s^{n-k-1}} = \frac{(k+1)s}{(n-k)r}$$

De manera que $t_k \geq t_{k+1}$ si y sólo si $ks+s \geq nr-kr$, es decir, $k \geq n\frac{r}{r+s} - \frac{s}{r+s} = (n+1)\frac{r}{r+s} - 1$.

Así que, los términos $t_k = \binom{n}{k} r^k s^{n-k}$ tienen la propiedad de que crecen con k hasta alcanzar su máximo valor cuando $(n+1)\frac{r}{r+s} - 1 \leq k \leq (n+1)\frac{r}{r+s}$ (si $(n+1)\frac{r}{r+s}$ es un número entero, el valor máximo se alcanza en dos valores de k), después de lo cual decrecen con k .

En la siguiente gráfica se muestran los valores de $\frac{t_k}{(r+s)^n}$ para el binomio $(1+5)^{1200}$.



$$n = 1200, r = 1, s = 5$$

El teorema de Bernoulli establece que, para cualquier número $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(r+s)^n} \sum_{\{k \in \mathbb{N}; k \in [n\frac{r}{r+s} - n\varepsilon, n\frac{r}{r+s} + n\varepsilon]\}} t_k = 1$$

Así que lo que dice el resultado es que, la suma de los términos que se encuentran alrededor del término máximo (en un intervalo de radio $n\varepsilon$) es prácticamente igual a la suma de todos los términos del desarrollo del binomio.

En términos de probabilidades, el teorema dice lo siguiente:

Supongamos que realizamos n observaciones (independientes) de un determinado fenómeno aleatorio y denotemos por X_n al número de veces en que se observa que ocurre un determinado evento A , cuya probabilidad de ocurrencia es igual a p . La frecuencia relativa con la que ocurre el evento A es entonces $\frac{X_n}{n}$. El teorema de Bernoulli asegura entonces que, dado cualquier número $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, a medida que n crece, la probabilidad de que se cumpla la relación $|\frac{X_n}{n} - p| \leq \varepsilon$ se acerca a 1. En símbolos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \frac{X_n}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right] = 1$$

El ejemplo de la gráfica corresponde al lanzamiento de un dado 1200 veces consecutivas y el evento A consiste en la obtención del número 6. En este caso, el término máximo del desarrollo del binomio $(1+5)^{1200}$ se obtiene cuando $k = 200$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{30}$ se tiene $n\varepsilon = 40$ y:

$$P \left[\left| \frac{X_n}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right] = \sum_{k=160}^{240} \binom{1200}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{1200-k} = 0,99828$$

4. AZAR OBJETIVO Y AZAR IRREDUCTIBLE

La concepción determinista mecanicista comenzó a resquebrajarse, desde dentro de ella misma, con los avances científicos de la segunda mitad del siglo XIX; un nuevo paradigma comenzó a gestarse, el cual se afianzaría plenamente durante el siglo XX.

Fue durante la segunda mitad del siglo XIX cuando surgió la Mecánica Estadística con los trabajos de Krönig, Clausius, Maxwell y Boltzmann, donde la teoría de la probabilidad se constituyó como la herramienta fundamental para el estudio de sistemas con muchas partículas.

Además, fue en ese periodo cuando surgió la teoría de Mendel sobre la herencia y la teoría de Darwin sobre la evolución de las especies, la primera fundada en un modelo probabilístico y la segunda planteando que el surgimiento de nuevas especies se realiza al azar. Más aún, los estudios de datos crecieron a un ritmo acelerado con los trabajos de Bienaymé, Quetelet y Galton, entre otros.

A finales del siglo XIX el azar y la teoría de la probabilidad eran ya parte inseparable del cuerpo científico de la época.

La nueva irrupción del azar en el pensamiento científico cambió el paradigma; de ser pensado únicamente un producto de nuestra ignorancia pasó a conceptualizarse como algo objetivo. En 1896, Poincaré expresó claramente este cambio:

“... en la teoría cinética de los gases, se encuentran las conocidas leyes de Mariotte y de Gay-Lussac, gracias a la hipótesis de que las velocidades de las moléculas gaseosas varían irregularmente, es decir, al azar. Las leyes observables serían mucho menos simples, dirían los físicos, si las velocidades estuvieran arregladas por alguna ley elemental simple, si las moléculas estuvieran, como se dice, organizadas, si obedecieran a alguna disciplina. Es gracias al azar, es decir, gracias a nuestra ignorancia, que podemos concluir; y entonces, si la palabra azar es simplemente un sinónimo de ignorancia, ¿qué querría decir eso? ¿Se traduciría entonces como sigue? Me pide usted que le prediga los fenómenos que van a producirse. Si, por desgracia, conociera las leyes de esos fenómenos, podría lograrlo únicamente mediante cálculos inextricables y debería renunciar a responderle; pero, como tengo la suerte de ignorarlas, le voy a responder en seguida. Y, lo más extraordinario, es que mi respuesta será correcta. Se requiere entonces que el azar sea más que el nombre que le damos a nuestra ignorancia.” ([21], p. 2-3)

También Poincaré hizo ver que aún en algunos fenómenos regidos por un determinismo estricto, podría hablarse de azar al ser impredecibles: “Una causa muy pequeña que se nos escapa, determina un efecto considerable el cual no podemos no ver, y entonces decimos que este efecto es debido al azar. Si conociéramos exactamente las leyes de la naturaleza y la situación del universo en el instante inicial, podríamos predecir exactamente la situación de ese mismo universo en un instante posterior. Pero, aun cuando las leyes naturales no tuvieran ningún secreto para nosotros, no podríamos conocer la situación mas que aproximadamente. Si eso nos permite predecir la situación posterior con la misma aproximación, es todo lo que necesitamos, decimos que el fenómeno ha sido predicho, que está regido por leyes; pero eso no es siempre así, puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales engendren unas muy grandes en los fenómenos finales; un pequeño error en las primeras produciría un

error enorme en las últimas. La predicción se hace imposible y tenemos el fenómeno fortuito.” ([21], p. 4-5)

Durante la primera mitad del siglo XX el azar y la teoría de la probabilidad irrumpirían aún con más fuerza en el conocimiento científico con el surgimiento de la mecánica cuántica, donde el azar es considerado como un elemento irreductible de la naturaleza y las leyes de ésta, al nivel microscópico, únicamente son expresables en términos de probabilidades. Más adelante, la teoría del caos vendría a reforzar la idea de la impredecibilidad de los fenómenos, aún en muchos considerados como regidos por leyes totalmente deterministas.

De esta forma, el azar y la teoría de la probabilidad son hoy una parte fundamental de nuestra descripción y estudio de la naturaleza. La ciencia de hoy da indicios de que las llamadas leyes de la naturaleza, que expresan el orden que concebimos con nuestro lenguaje, únicamente pueden expresarse en términos de posibilidades.

Referencias

- [1] Alfonso X; Book of games, Traducción de Sonja Musser Golladay, <http://historicgames.com/alphonso/>, 2003.
- [2] Bernoulli, Jacques; L'Art de Conjecturer, L.G.F. Vastel, G. Le Roy, Caen, 1801. Traducción de Ars Conjectandi, Basileae, 1713.
- [3] Cardano, Gerolamo; Liber de ludo aleae, 1564. Publicado en Opera Imnia, Vol. 1, 1663. Traducción al inglés en The book on games on chance, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961.
- [4] Collette, Jean-Paul; Historia de las Matemáticas I, Ed. Siglo XXI, México, 2006.
- [5] Collette, Jean-Paul; Historia de las Matemáticas II, Ed. Siglo XXI, México, 2003.
- [6] David, Florence Nightingale; Dicing and Gaming, Biometrika, Vol. 42, No. 1/2. (Jun., 1955), pp. 1-15.
- [7] David, Florence Nightingale; Games, gods and gambling, Ed. Charles Griffin, Londres, 1962.
- [8] Einstein, Albert & Infeld, Leopold; L'évolution des idées en physique, Ed. Flammarion, París, 1979.
- [9] Estévez-Sola, Juan Antonio; Carmina Burana, Antología, Alianza Editorial, Madrid, 2006.
- [10] Farrington, Benjamin; Ciencia griega, Ed. Icaria, Barcelona, 1979.
- [11] Farrington, Benjamin; La rebelión de Epicuro, Ed. Laia, Barcelona, 1983.
- [12] Fermat, Pierre & Pascal, Blaise; Correspondance - 1654, Oeuvres de Pascal, t. III, p. 369-430.
- [13] Hacking, Ian; La domesticación del azar, Ed. Gedisa, Barcelona, 1990.
- [14] Hacking, Ian; El surgimiento de la teoría de la probabilidad, Ed. Gedisa, Barcelona, 1995.
- [15] Huygens, Christiaan; Du calcul dans les jeux de hasard, Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens, Vol. XIV, Martinus Nijhoff, 1920. Traducción de De Ratiociniis in Aleae Ludo, 1657.
- [16] Laplace, Pierre Simon; Essai philosophique sur les probabilités (1814), Gauthier-Villars, París, 1921.
- [17] Maistrov, L. E., Probability theory (a historical sketch), Academic Press, 1974.
- [18] Newman, James Roy; Sigma, el mundo de las matemáticas, Vol. 3, Ed. Grijalbo, Barcelona, 1997.
- [19] Leibniz, Gottfried; Tratados fundamentales, Discurso de metafísica, Ed. Losada, Buenos Aires, 2004.
- [20] Martínez-Muñoz, Sergio Fernando; De los efectos a las causas, Ed. Paidós, México, 2001.g, Nueva York, 1992.
- [21] Poincaré, Jules Henri; Calcul des Probabilités, Gauthier-Villars, París, 1896..
- [22] Prigogine I., El fin de las certidumbres, Taurus, 1997.